Θεωρία Ομάδων – Θέματα Εξετάσεων

Πέτρος Πλουμίδης
Φοίβος Συρίγος

3 Μαΐου 2023

1 **Θέματα Ιουνίου** 2013

Θέμα 1
Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές. Αιτιολογήστε πλήρως την απάντηση σας.

(i) Η S_{10} έχει υποομάδα δείκτη 4.

(ii) Αν η G είναι ομάδα τάξεως 63, τότε τα πηλίκα μίας συνθετικής σειράς έχουν τάξη πρώτο αριθμό.

(iii) Δύο ομάδες τάξεως 6 είναι ισόμορφες.

Λύση

(i) Λάθος. Παίρνουμε την δράση της $S_{10}|_{A_{10}}$ στο σύνολο ${}^{S_{10}}/_{H}$, αν $H \leq S_{10}$ με $[S_{10} : H] = 4$.
Άρα, έχουμε $f : A_{10} \to S_4$, A_{10} απλή και $kerf \subseteq H$.
Αν $kerf = A_{10}$ και $A_{10} \subseteq H \subseteq S_{10}$ τότε,

$$[S_{10} : A_{10}] = [S_{10} : H][H : A_{10}] \Rightarrow 2 = 4[H : A_{10}] \Rightarrow [H : A_{10}] = 1/2 \text{ αδύνατο.}$$

Τελικά, $kerf = 1 \Rightarrow A_{10} \hookrightarrow S_4$ *άτοπο*!

(ii) Σωστό. Η σειρά

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft G_2 \cdots \triangleleft G_n = G \text{ είναι συνθετική} \Leftrightarrow {}^{G_{i+1}}/_{G_i} \text{ απλή } \forall i \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |{}^{G_{i+1}}/_{G_i}| \text{ πρώτος } \forall i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

θυμηθείτε ότι οι ομάδες που έχουν τάξη γινόμενο δύο πρώτων δεν είναι απλές όπως και οι ομάδες με τάξη p^k όπου $k > 1$, συνεπώς η τελευταία ισοδυναμία έπεται άμεσα καθώς $63 = 7 \cdot 3^2$.

(iii) Λάθος, η $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ είναι κυκλική τάξης 6 και αβελιανή σε αντίθεση με την S_3 η οποία έχει τάξη 6 και δεν είναι αβελιανή. Συνεπώς δύο ομάδες τάξης 6 δεν μπορεί να είναι ισόμορφες.

■

Θέμα 2

(i) Έστω G πεπερασμένη ομάδα τάξεως p^n,
όπου p πρώτος και $H \neq 1$ κανονική υποομάδα της G. Δείξτε ότι $H \cap Z(G) \neq 1$.

(ii) Ταξινομήστε, ως προς ισομορφισμό, όλες τις ομάδες τάξεως $1127 = 7^2 \cdot 23$.

Λύση

(i) Θεωρώ την $G \rightsquigarrow H$ (δράση συζηγίας) και αφού $H \triangleleft G$ *η δράση είναι καλά ορισμένη.*
Παρατηρούμε ότι αν μία κλάση συζηγίας δεν είναι μονοσύνολο τότε η τάξη της διαιρείται από τον p και $Cl_G(h) = \{h\} \Leftrightarrow h \in H \cap Z(G)$ (γιατί;)
Τελικά,

$$|H| = \sum_{|Cl_G(h)|=1} |Cl_G(h)| + \sum_{|Cl_G(h)|>1} |Cl_G(h)| = |H \cap Z(G)| + \sum_{|Cl_G(h)|>1} |Cl_G(h)|$$

- $p \mid |H|$
- $p \mid \sum_{|Cl_G(h)|>1} |Cl_G(h)|$

Έπεται ότι $p \mid |H \cap Z(G)| \Rightarrow H \cap Z(G) \neq 1$

(ii) Έστω G ομάδα με $|G| = 1127 = 7^2 \cdot 23$
Παρατηρούμε ότι $n_7 = n_{23} = 1$. Αν P η $Sylow\ 7-$ υποομάδα της G και Q η $Sylow\ 23-$ υποομάδα της G, τότε $G = P \times Q$ (γιατί;). Όμως, οι P, Q είναι αβελιανές ($|P| = 7^{\mathbf{2}}$), άρα από γνωστό θεώρημα για πεπερασμένες αβελιανές ομάδες παίρνουμε τις ακόλουθες μη ισόμορφες ομάδες τάξης 1127 ,

$$G \cong \mathbb{Z}_{23} \times \mathbb{Z}_{7^2} \quad \text{ή} \quad G \cong \mathbb{Z}_{23} \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$$

■

Θέμα 3

(i) Έστω G πεπερασμένη μηδενοδύναμη ομάδα και $\alpha, \beta \in G$. Αν $(o(\alpha), o(\beta)) = 1$, τότε $\alpha\beta = \beta\alpha$.

(ii) Να εξετασθεί αν οι S_4, S_5 είναι επιλύσιμες, μηδενοδύναμες ομάδες

Λύση

(i) Αφού G πεπερασμένη μηδενοδύναμη ομάδα, μπορεί να γραφτεί ως το ευθύ γινόμενο των $Sylow$ υποομάδων της. Δηλαδή, αν $P_i \in Syl_{P_i}(G)$, τότε

$$G = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n$$

Παρατηρούμε ότι αν $g = \prod_{i=1}^{n} g_i$ και $p_i \nmid |g_i| \Rightarrow g_i = 1$.
Αφού $(o(a), o(\beta)) = 1 \overset{\chi\beta\gamma}{\Longrightarrow} \alpha \in P_1 \times \cdots \times P_\gamma = A'$, $\beta \in P_{\gamma+1} \times \cdots \times P_n = B'$
Άρα $\alpha \in A' \times B'$ και $\beta \in A' \times B' \Rightarrow \alpha\beta = \beta\alpha$.

(ii) Για $n \geq 3$, $Z(S_n) = 1$, άρα οι S_4, S_5 δεν είναι μηδενοδύναμες.
$|S_4| = 1234 = 2^3 3$, άρα S_4 επιλύσιμη.
Αν η S_5 ήταν επιλύσιμη τότε κάθε συνθετική σείρα της είναι επιλύσιμη.
$1 \triangleleft A_5 \triangleleft S_5$ συνθετική σείρα της G (γιατί;).
Άρα A_5 αβελιανή, άτοπο.

■

Θέμα 4

(i) Αποδείξτε ότι υποομάδα επιλύσιμης ομάδας είναι επιλύσιμη και ότι επιλέπτυνση επιλύσιμης σειράς είναι επίσης επιλύσιμη σειρά.

(ii) Αν η G είναι απλή ομάδα τάξεως $2^3 7^2$ και η H είναι υποομαδα της G, τότε $[G : H] \geq 14$.

(iii) Να εξετασθεί αν μία ομάδα τάξεως $2^3 7^2$ είναι επιλύσιμη.

Λύση

(i) Θεωρία

(ii) Θεωρούμε την $G \rightsquigarrow {}^{G}/_{H}$ (δράση σε σύμπλοκα) και έστω ότι $[G : H] = n$.
Αφού G απλή ομάδα και $n > 1$, ο ομομορφισμός $\varphi : G \to S_n$ είναι μονομορφισμός
($ker\varphi \lhd G, ker\varphi < H$) και έτσι

$$G \hookrightarrow S_n \Leftrightarrow |G| \mid n! \Leftrightarrow 2^3 7^2 \mid n!$$

Για να ισχύει αυτό, σίγουρα το $n!$ θα πρέπει να περιέχει δύο φορές τον αριθμό 7. Συνεπώς , το μικρότερο n που ικανοποιεί αυτήν την συνθήκη είναι το $14 = 2 \cdot 7$, άρα $[G : H] \geq 14$.

(iii) Έστω G ομάδα με τάξη $2^3 7^2$

$$n_7 \equiv 1 mod 7 \quad \& \quad n_7 \mid 2^3 \Leftrightarrow$$

$$n_7 = 1 \quad \text{ή} \quad n_7 = 8$$

.
Αν $n_7 = 1$ τότε η ομάδα με τάξη $2^3 7^2$ είναι επιλύσιμη ως επέκταση επιλυσίμων , αφού οι p ομάδες είναι επιλύσιμες.
Αν $n_7 = 8$, έστω $P, Q \in Syl_7(G)$ και $N = N_G(P \cap Q)$ με $P \neq Q$, $P \cap Q \neq 1$.
P, Q αβελιανές $(7^2) \Rightarrow P, Q \subseteq N \Rightarrow 7^2 < |N|$.
Συνεπώς, $|N| = 7^2 2$ ή $7^2 4$ ή $7^2 8$.
Εξετάστε ότι σε κάθε περίπτωση G επιλύσιμη ομάδα .
Θα μπορούσε $|N| = 7^2$;

■

2 Θέματα Ιουνίου 2012

Θέμα 1

(1) Έστω G μη αβελιανή τάξης p^3, για κάποιο πρώτο p. Δείξτε ότι $G \Big/ Z(G)$ είναι το ευθύ άθροισμα δύο κυκλικών τάξεων p.

(2) Αν ο πρώτος p διαιρεί τον δείκτη κάθε γνήσιας υποομάδας της G, τότε ο p διαιρεί την τάξη της $Z(G)$.

(3) Αληθεύει ότι η S_{18} έχει κανονική υποομάδα δείκτη 9;

Λύση

(i) Η G είναι p- ομάδα, συνεπώς έχει μη τετριμένο κέντρο. Αφού ισχύει $Z(G) \trianglelefteq G$, ορίζεται η ομάδα πηλίκο $G \Big/ Z(G)$. Από *Lagrange*,

$$|Z(G)| \mid |G| \Leftrightarrow |Z(G)| \mid p^3 \Leftrightarrow$$

$$|Z(G)| = p \quad \text{ή} \quad |Z(G)| = p^2 \quad \text{ή} \quad |Z(G)| = p^3$$

- Αν $|Z(G)| = p^3$, τότε η G θα είναι αβελιανή. *Άτοπο*
- Αν $|Z(G)| = p^2$, τότε $G \Big/ Z(G)$ είναι κυκλική[1], άρα η G είναι αβελιανή. *Άτοπο*
- Αν $|Z(G)| = p$, τότε $G \Big/ Z(G) \cong \mathbb{Z}_{p^2}$, η οποία είναι κυκλική τάξης p^2. Άρα

$$\mathbb{Z}_{p^2} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \Rightarrow G \Big/ Z(G) \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$$

.

(ii) $G \rightsquigarrow G$ (δράση συζηγίας)
Έστω $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ένα σύνολο αντιπροσώπων των τροχιών της δράσης που δεν είναι μονοσύνολα.
Από γνωστό θεώρημα $|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{n} |Cl_G(xi)|$,όμως $|Cl_G(xi)| = [G : C_G(xi)]$
$p \mid |Cl_G(xi)|$ & $p \mid |G| \Rightarrow p \mid Z(G)|$

(iii) Λάθος, η μοναδική μη τετριμμένη γνήσια υποομάδα της S_{18} είναι η A_{18} και $[S_{18} : A_{18}] = 2$

■

[1]Απόδειξη: Έστω ότι $G/Z(G)$ είναι κυκλική και $< xZ(G) >$ ένας γεννήτορας της κυκλικής, όπου $x \in G$. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $g \in G$, ισχύει $gZ(G) = (xZ(G))^m = x^m Z(G)$. Εξ'ορισμού, αν $H \leq G$ και $aH = bH \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$. Συνεπώς, $g^{-1}x^m \in Z(G)$ και $g \in G$ τυχαίο. Άρα G αβελιανή.

Θέμα 2
Έστω $|G| = 5 \cdot 7^2 \cdot 17$ και H υποομάδα της G με $|H| = 7^2 \cdot 17$.
Δείξτε ότι:

(i) Η H είναι αβελιανή.

(ii) $H \triangleleft G$

(iii) Η G είναι αβελιανή.

Λύση

(i) $n_7 = 1 mod 7$ & $n_7 \mid 17 \Leftrightarrow n_7 = 1, 8, 15$ & $n_7 = 1$ ή $n_7 = 17 \Leftrightarrow n_7 = 1$
Όμοια $n_{17} = 1$
Ομάδες με τάξη πρώτο ή τετράγωνο πρώτου είναι αβελιανές !
Συνεπώς, η ομάδα H θα μπορούσε να είναι $\mathbb{Z}_{7^2} \times \mathbb{Z}_{17}$ ή $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{17}$.

(ii) $H \triangleleft G$ διότι $[G : H] = 5$ (5 είναι ο μικρότερος πρώτος αν γράψουμε την τάξη της G σε γινόμενο πρώτων, βλ. Ασκηση 5 σελίδα 18 των σημειώσεων.)

(iii) Παρατηρήστε ότι $n_5 = 1$, $|{}^{G}/_{H}| = 5$. Έπεται σχετικά άμεσα ότι $G = \mathbb{Z}_5 \times H$ και επειδή ευθύ γινόμενο κυκλικών είναι κυκλική έχουμε το ζητούμενο.

■

Θέμα 3

(i) Δείξτε ότι η S_4 είναι επιλύσιμη.

(ii) Αν η G είναι επιλύσιμη πεπερασμένη ομάδα, τότε κάθε πηλίκο συνθετικής σειράς είναι κυκλική ομάδα.

(iii) Αν $|G| = 2^2 \cdot p^n$, όπου p περιττός πρώτος, τότε η G είναι επιλύσιμη.

Λύση

(i) Θα κάνουμε εδώ μία διαφορετική λύση χρησιμοποιώντας τον ορισμό και γνώσεις από τη Βασική Άλγεβρα.
Οι κανονικές υποομάδες της A_4 γνωρίζουμε ότι είναι η $Klein$ τάξης 4, δηλαδή η
$V_4 = \{e, (12)(23), (13)(24), (14)(23)\}$, η ίδια η A_4 και η ταυτοτική. Έχουμε λοιπόν την κανονική σειρά

$$1 \triangleleft V_4 \triangleleft A_4$$

και $|{}^{A_4}/_{V_4}| = \frac{12}{4} = 3$ αβελιανή και ${}^{V_4}/_{1} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ αβελιανή. Άρα η σειρά είναι επιλύσιμη και η A_4 είναι επιλύσιμη. Θα δείξουμε ότι η S_4 είναι επιλύσιμη.
Ισχύει ${}^{S_4}/_{A_4} = \mathbb{Z}_2$ επιλύσιμη ως αβελιανή, η A_4 είναι επίλυσιμη και η S_4 λοιπόν είναι επιλύσιμη ως επέκταση επιλυσίμων.

(ii) Αν η G πεπερασμένη επιλύσιμη ομάδα τότε έχει επιλύσιμη συνθετική σειρά

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft G_2 \triangleleft \cdots \triangleleft G_n = G$$

Άρα , ${}^{G_{i+1}}/_{G_i}$ είναι απλή & ${}^{G_{i+1}}/_{G_i}$ είναι αβελιανή $\Rightarrow |{}^{G_{i+1}}/_{G_i}| = p$, με p πρώτο Από βασική άλγεβρα ξέρουμε ότι αν μία ομάδα είναι αβελιανή και απλή τότε έχει τάξη πρώτο.

(iii) Έστω ότι το $|G| = 2^2 p^n$
Γνωρίζουμε ότι $n_p \mid 4$ & $n_p \geq 1$ & $n_p \equiv 1 mod p$.

(α′) Αν $p = 3$ τότε το $n_3 = 1$ ή 4. Στην περίπτωση που $n_3 = 1$ η G επιλύσιμη ως επέκταση επιλύσιμων. Διαφορετικά το $n_3 = 4$ και αν $P \in Syl_3(G)$ τότε από *βασική σχέση* $n_3 = [G : N_G(p)]$ αναγόμαστε στις δράσεις και έχουμε $p : G \to S_4$, χρησιμοποιώντας το πρώτο θεώρημα ισμορφισμών και την κλειστότητα των επιλύσιμων ομάδων ως προς υποομάδες και επεκτάσεις παίρνουμε το ζητούμενο.

(β′) Για $p \geq 5 \Rightarrow n_p = 1$ και αν $P \in Syl_p(G)$ ισχυέι ότι $P \triangleleft G$ και$|^G/_P| = 2^2$ η επιλυσιμότητα της G έπεται άμεσα αφού οι p ομάδες είναι επιλύσιμες και επέκταση επιλύσιμων είναι επιλυσίμη.

■

Θέμα 4

(i) Πόσες μη ισόμορφες μηδενοδύναμες ομάδες τάξης p^2q, όπου p, q διακεκριμένοι πρώτοι, υπάρχουν;

(ii) Αν $G = H_1 \times H_2$, $|H_1| = 6, |H_2| = 16$, εξετάστε αν η G είναι μηδενοδύναμη.

(iii) Αν G πεπερασμένη ομάδα, N υποομάδα του $Z(G)$ και η G/N είναι μηδενοδύναμη, τότε η G είναι μηδενοδύναμη.

Λύση

(i) Έστω G ομάδα με τάξη p^2q.
Αφού G μηδενοδύναμη έπεται ότι η G γράφεται σαν ευθύ γινόμενο των $Sylow$ υποομάδων της, δηλαδή $G = P \times Q,\ P \in Syl_2(G),\ Q \in Syl_3(G)$
Επειδή οι P, Q αβελιανές (γιατί;) , από γνωστό θεώρημα πεπερασμένων αβελιανών ομάδων έπεται άμεσα ότι οι μη ισόμορφες μδενοδύναμες ομάδες είναι οι εξής :

$$G = \mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_q \quad \text{ή} \quad G = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$$

(ii) Η G δεν είνα αναγκαστικά μηδενοδύναμη!
$H_1 \cong S_3$ και $H_2 \cong \mathbb{Z}_{16}$
Είναι η G μηδενοδύναμη;

(iii) Αφού G/N μηδενοδύναμη, για κάποιο n έχουμε

$$1 = Z^0(G/N) \lhd Z(G/N) \cdots \lhd Z^n(G/N) = G/N \overset{\text{Θεωρ. Αντιστοιχίας}}{\Longrightarrow}$$

$$1 = G_0/N \lhd G_1/N \cdots \lhd G_n/N = G/N$$

όπου $N \subseteq G_i\ \forall i,\ G_i \lhd G, G_i \subseteq G_{i+1}$, οπότε έχουμε την ακόλουθη κανονική σειρά της G:

$$1 \lhd N \lhd G_1 \cdots \lhd G_n = G$$

Θα δείξουμε ότι είναι κεντρική σειρά της G.
Για $n = 1$, $[N, G] \subseteq G_0 = 1$, αφού $N \subseteq Z(G)$ ισχύει .
Για $g_{i+1} \in G_{i+1}$ και $g \in G$ έχουμε:

$$[g_{i+1}N, gN] = [g_{i+1}, g]N \in G_i/N \quad \text{αφού} \quad [G_{i+1}/N, G/N] \subseteq G_i/N \Rightarrow$$

$$[g_{i+1}, g] \in g_iN, g_i \in G_i$$

, δηλαδή

$$[g_{i+1}, g] \in g_iN \subseteq g_iG_i = G_i \Rightarrow [G_{i+1}, G] \subseteq G_i$$

■

3 Θέματα Ιουνίου 2011

Θέμα 1
Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές. Αιτιολογήστε την απάντηση σας.

(i) Υπάρχει απλή ομάδα με 360 στοιχεία.

(ii) Υπάρχει απλή ομάδα με 121 στοιχεία.

(iii) Έστω G, K, H ομάδες και $\varphi : G \to K, \psi : K \to H$ ομομορφισμοί έτσι ώστε $Ker\psi \subseteq \varphi(G)$. Αν οι G και η H είναι επιλύσιμες, τότε και η K είναι επιλύσιμη.

Λύση

(i) Σωστό, Πράγματι, η A_6 είναι απλή ομάδα με τάξη 360.

(ii) Λάθος, Έστω G ομάδα με $|G| = 121 = 11 \cdot 11 = 11^2$.
Η G δεν είναι απλή ως $p-$ ομάδα .

(iii) Σωστό, ${}^{G}\!/_{ker\varphi} \cong Im\varphi = \varphi(G)$, άρα η $\varphi(G)$ είναι επιλύσιμη, κάθως G επιλύσιμη.
Άμεσα, έπεται ότι $ker\psi$ είναι επιλύσιμη ως υποομάδα επιλύσιμης .
Επιπλέον, ${}^{K}\!/_{ker\psi} \cong Im\psi \leq H$ επιλύσιμη αφού H επιλύσιμη.

■

Θέμα 2
Έστω G ομάδα, $N \trianglelefteq G$ και p πρώτος αριθμός που διαιρεί την τάξη της N. Αν P $Sylow$ $p-$ υποομάδα της N, τότε $G = N \cdot N_G(P)$[2].

Λύση
Για κάθε $g \in G$ έχουμε :

$$P \leq N \Rightarrow gPg^{-1} \leq gNg^{-1} = N \xrightarrow{|P|=|gPg^{-1}|} P, gPg^{-1} \in Syl_p(N)$$

και άρα είναι συζηγείς στην N. Δηλαδή $\ni$ η $n \in N$ με

$$nPn^{-1} = gPg^{-1} \Rightarrow n^{-1}g \in N_G(P) \Rightarrow g \in NN_G(P) \Rightarrow G = N \cdot N_G(P)$$

■

Θέμα 3
Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει ομάδα G τέτοια ώστε ${}^{G}\!/_{Z(G)} \cong \mathbb{Z}$.

Λύση
Αν ${}^{G}\!/_{Z(G)} \cong \mathbb{Z} \Rightarrow {}^{G}\!/_{Z(G)}$ κυκλική $\Rightarrow G$ αβελιανή $\Rightarrow G = Z(G) \Rightarrow {}^{G}\!/_{Z(G)} = 1 \Rightarrow \mathbb{Z} \cong 1$

■

[2]Για περισσότερα ανατρέξτε εδώ https://en.wikipedia.org/wiki/Frattini's_argument

Θέμα 4
Έστω G πεπερασμένη μη αβελιανή ομάδα. Αν η G περιέχει υποομάδα H πεπερασμένου δείκτη με $1 < [G : H] < 5$, τότε η G δεν είναι απλή.

Λύση
Έστω ότι G απλή μη αβελιανή η οποία περιέχει υπομάδα H πεπερασμένου δείκτη με $1 < [G : H] < 5$.

- Αν $[G : H] = 2$ τότε αν θεωρήσουμε την $G \rightsquigarrow {}^{G}/_{H}$ έπεται ότι $G \hookrightarrow S_2$ (γιατί;). Άτοπο αφού G μη αβελιανή.
- Αν $[G : H] = 3$ όμοια $G \hookrightarrow S_3 \Rightarrow |G| \mid 1 \cdot 2 \cdot 3$ αδύνατο (γιατι;).
- Αν $[G : H] = 4$ όμοια.

■

Θέμα 5
Υποθέτουμε ότι η G είναι μια ομάδα περιττής τάξης και $N \triangleleft G$ με $|N| = 5$. Αποδείξτε ότι η N περιέχεται στο κέντρο της G.

Λύση
Αφού η G είναι περιττής τάξης, όλες οι κλάσεις συζηγίας της G έχουν περιττή τάξη . Αφού η N είναι κανονική στην G, γράφεται ως ένωση κλάσεων συζηγίας. Από το Θεώρημα (2.3.1), οι μόνοι δυνατοί συνδυασμοί για την N είναι

$$5 = 3 + 1 + 1 \quad \text{ή} \quad 5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

Σε κάθε περίπτωση, η N περιέχει ένα στοιχείο εκτός του ταυτοτικού, του οποίου η κλάση συζηγίας είναι μονοσύνολο, άρα ανήκει στο κέντρο της G, $Z(G)$. Αυτό όμως το στοιχείο θα είναι γεννήτορας της N (αφού $N \cong \mathbb{Z}_5$), άρα η $N \subseteq Z(G)$ [3].

■

[3] Ισχύουν και πιο ισχυρά αποτελέσματα γενικά:

Λήμμα (Αλλιώς ${}^{N}/_{C}$ θεώρημα): Έστω G ομάδα και H υποομάδα της G. Δείξτε ότι ${}^{N_G(H)}\big/_{Z(G)}$ εμφύεται στους αυτομορφισμούς της H.

Πόρισμα 1 : Έστω G πεπερασμένη ομάδα, H κανονική υποομάδα της G τάξης p και $(|G|, p - 1) = 1$. Τότε $H \subseteq Z(G)$.

Πόρισμα 2 : Έστω G ομάδα πεπερασμένης τάξης, και $H \trianglelefteq G$ με $|H| = p$, όπου p ο μικρότερος πρώτος που διαιρεί την τάξη της G. Τότε $H \subseteq Z(G)$.

Θέμα 6
Περιγράψτε, ως προς ισομορφισμό, όλες τις ομάδες τάξεως 1225.

Λύση
Έστω G ομάδα με $|G| = 1225 = 5 \cdot 245 = 5^2 \cdot 7^2$ Έχουμε

$$n_5 = 1mod(5) \ \ \& \ \ n_5 \mid 7^2 \Leftrightarrow n_5 = 1mod(5) \ \ \& \ \ n_5 = 1 \ \ || \ \ n_5 = 7 \ \ || \ \ n_5 = 49 \Leftrightarrow$$

$$n_5 = 1$$

Άρα υπάρχει μοναδική $Sylow5-$υποομάδα της G, έστω P, η οποία αφού είναι μοναδική, είναι κανονική.

$$n_7 = 1mod(7) \ \ \& \ \ n_7 \mid 5^2 \Leftrightarrow n_7 = 1mod(7) \ \ \& \ \ n_7 = 1 \ \ || \ \ n_7 = 5 \ \ || \ \ n_7 = 25 \Leftrightarrow$$

$$n_7 = 1$$

Άρα υπάρχει μοναδική $Sylow7-$υποομάδα της G, έστω Q, η οποία αφού είναι μοναδική, είναι κανονική. Από θεώρημα $Sylow$, η G γράφεται σαν το ευθύ γινόμενο των $Sylow$ υποομάδων της.
Άρα έχουμε $G = P \times Q = \mathbb{Z}_{5^2} \times \mathbb{Z}_{7^2}$.
Ως προς ισομορφισμό λοιπόν, έχουμε τις εξής επιλογές:

- $G = \mathbb{Z}_{5^2} \times \mathbb{Z}_{7^2}$
- $G = \mathbb{Z}_{5^2} \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$
- $G = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7 \times Z_7$
- $G = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{7^2}$

■

Θέμα 7
Έστω G πεπερασμένη μηδενοδύναμη ομάδα και H υποομάδα της G πεπερασμένου δείκτη n. Αποδείξτε ότι $g^n \in H$ για κάθε $g \in G$.

Λύση
Έστω G πεπερασμένη και $[G : H] = n$. Αφού η G είναι μηδενοδύναμη, κάθε υποομάδα της είναι υποκανονική, άρα και η H είναι υποκανονική. Αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει κανονική σειρά

$$H = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \cdots \triangleleft H_{k-1} \triangleleft H_k = G$$

Αφού $[G : H] = n$, έχουμε ότι $[H_k : H_{k-1}] = n_k$, με $n = n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k \ \ (*)$.
Αφού $H_{k-1} \triangleleft H_k = G$, έχουμε ότι $[G : H_{k-1}] = n_k$ και για $g \in G$ τυχαίο, έχουμε ότι $g^{n_k} \in H_{k-1}$ [4]. Δουλεύοντας όμοια, έχουμε ότι $(g^{n_k})^{n_{k-1}} \in H_{k-2}$ και συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία μέχρι να φτάσουμε στην $H_0 = H$, μέσω της $(*)$ συμπεραίνουμε ότι $g^n \in H$.

■

[4] Άμεσο είναι αυτό αν θεωρήσουμε ότι η ομάδα πηλίκο $G \big/ H_{k-1}$ έχει τάξη n_k. Από $Lagrange$, κάθε στοιχείο της ομάδας πηλίκο θα πρέπει να διαιρεί το n_k και για τυχαίο $g \in G$ έχουμε $(gH_{k-1})^{n_k} = g^{n_k} H_{k-1} = H_{k-1}$

4 Θέματα Φεβρουαρίου 2019

Θέμα 1

(i) Έστω G μία ομάδα τάξεως p^3 , όπου p πρώτος. Αποδείξτε ότι αν η G δεν είναι αβελιανή, τότε η παράγωγος υποομάδα της G ισούται με το κέντρο της, δηλαδή $G' = Z(G)$.

(ii) Αν η P είναι μια υποκανονική $Sylow$ υποομάδα μίας πεπερασμένης ομάδας G, τότε η P είναι κανονική στην G.

Λύση

(i) Αφού $|G| = p^3 \overset{Z(G)\leq G}{\Longrightarrow} |Z(G)| \in \{p, p^2, p^3\}$
(θα μπορούσε το κέντρο να είναι η τετριμμένη ομάδα;)
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $Z(G) = p^2 \xrightarrow{|G/Z(G)| = p} G/Z(G)$ κυκλική $\Rightarrow G$ αβελιανή, άτοπο.
- Αν $Z(G) = p^3 \Rightarrow G = Z(G) \Rightarrow G$ αβελιανή , άτοπο.
- Αν $Z(G) = p \xrightarrow{|G/Z(G)| = p^2} G/Z(G)$ αβελιανή $\Rightarrow G' \leq Z(G) \Rightarrow |G'| = 1$ ή $|Z(G)| = p \Rightarrow$

$$G' = Z(G), \text{ αφού } G \text{ μη αβελιανή!}$$

(ii) Έστω

$$P = P_0 \lhd P_1 \lhd P_2 \lhd \cdots \lhd P_n = G$$

μία υποκανονική σειρά της G. Αρκεί να αποδείξουμε την υπόθεση για $P_2 = G$ (γιατι;).
Έστω λοιπόν η υποκανονική σειρά $P \lhd P_1 \lhd G$.
Έστω $g \in G$, θα δείξουμε ότι $P \lhd G$

$$P \lhd P_1 \Leftrightarrow gPg^{-1} \lhd gP_1g^{-1} \overset{P_1 \lhd G}{\Longleftrightarrow} gPg^{-1} \lhd P_1$$

Αφού P $Sylow$ $p-$ υποομάδα της G, τότε P $Sylow$ $p-$ υποομάδα της P_1 . Έτσι οι gPg^{-1}, P είναι συζηγείς στην P_1 ως $Sylow$ $p-$ υποομάδες της και έχουμε ότι $\ni p_1 \in P_1$ τέτοιο ώστε

$$gPg^{-1} = p_1Pp_1^{-1} \overset{P \lhd P_1}{\Longleftrightarrow} gPg^{-1} = P \Leftrightarrow P \lhd G$$

■

Θέμα 2

(i) Μία πεπερασμένη ομάδα $G \neq 1$ είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν κάθε μη τετριμμένο πηλίκο της περιέχει μη τετριμμένη αβελιανή κανονική υποομάδα.

(ii) Αν η G είναι μία πεπερασμένη μηδενοδύναμη ομάδα τέτοια ώστε $p^3 \nmid |G|$ για κάθε πρώτο p, τότε η G είναι αβελιανή.

Λύση

(i) " $\Rightarrow$ "
Έστω N κανονική υποομάδα της G,

$$G \text{ επιλύσιμη } \Leftrightarrow N,\ {}^{G}/_{N} \text{ επιλύσιμες}$$

Έχοντας την παραπάνω σμαντική πρόταση εύκαιρη η μία πορεία της απόδεξης γίνεται αρκετά απλούστερη.
Ας υποθέσουμε ότι η G είναι επιλύσιμη, έστω ${}^{G}/_{N}$ μη τετριμμένο πηλίκο.
Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι το πηλίκο είναι επιλύσιμη ομάδα και άρα

$$1 = P_0 \triangleleft P_1 \triangleleft P_2 \triangleleft \cdots \triangleleft P_n = {}^{G}/_{N}$$

Η ζητούμενη αβελιανή ομάδα είναι η P_1 (γιατί;)

(ii) " $\Leftarrow$ "
Ας υποθέσουμε τώρα ότι κάθε μη τετριμμένο πηλίκο της G περιέχει μη τετριμμένη αβελιανή κανονική υποομάδα.
Μία τέτοια υπόθεση είναι αρκετά ισχυρή κάθως μπορούμε να την εφαρμόσομε έξυπνα για κάποια κατάλληλη ομάδα.
Η G αποτελεί μη τετριμμένο πηλίκο του εαυτού της (γιατί;).
Εφαρμόζοντας την υπόθεση βρίσκουμε N_1 κανονική αβελιανή υποομάδα της G.

$$1 \triangleleft N_1 \triangleleft G$$

Αν το πηλίκο ${}^{G}/_{N_1}$ είναι αβελινή ομάδα, χρησιμοποιώντας την παραπάνω πρόταση τελειώσαμε. Διαφορετικά, εφαρμόζουμε ξάνα την υπόθεση για το πηλίκο ${}^{G}/_{N_1}$ και τώρα έχουμε

$$1 \triangleleft N_1 \triangleleft N_2 \triangleleft G$$

Ισχυρίζομαι ότι η διαδικασία αύτη δεν μπόρει να συνεχιστεί καθώς G πεπερασμένη όμαδα και τα πηλίκα μη τετριμμένα.
(Δώστε λεπτομέρειες και ολοκληρώστε την απόδειξη)
Σχόλιο: Σε πολλά μαθήματα θεωρίας ομάδων τετριμμένο πηλίκο ορίζεται το πηλίκο ${}^{G}/_{1_G}$ κάτι που μου δημιούργησε τρομερή σύγχυση!

(iii) Αφού η G μηδενοδύναμη πεπερασμένη ομάδα θα γράφεται ως ευθύ γινόμενο των $Sylow$ υποομάδων της.
Έστω ότι $G = P_1 \times \cdots \times P_s \ \Rightarrow |G| = p_1^{n_1} \dots p_s^{n_s}$
Αφού $p^3 \nmid |G|$ για κάθε πρώτο p, έπεται ότι $n_i \in \{1, 2\}\ \forall i \in \{1, 2, \dots, s\}$.
Από θεώρημα πεπερασμένων αβελιανών ομάδων ομάδων $P_i \cong \mathbb{Z}_p$ ή $P_i \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ ή $P_i \cong \mathbb{Z}_{p^2}$.
Άρα η G είναι ευθύ γινόμενο αβελιανών.

■

Θέμα 3

(i) Ταξινομήστε (ως προς ισομορφισμό) όλες τις ομάδες τάξεως 1225.

(ii) Για κάθε $n \geq 5$, κάθε γνήσια υποομάδα της H της A_n έχει δείκτη τουλάχιστον n.

Λύση

(i) Έστω G ομάδα με $|G| = 1225 = 5 \cdot 245 = 5^2 \cdot 7^2$
Έχουμε

$$n_5 = 1mod(5) \ \ \& \ \ n_5 \mid 7^2 \Leftrightarrow n_5 = 1mod(5) \ \ \& \ \ n_5 = 1 \ \ || \ \ n_5 = 7 \ \ || \ \ n_5 = 49 \Leftrightarrow$$

$$n_5 = 1$$

Άρα υπάρχει μοναδική $Sylow5-$υποομάδα της G, έστω P, η οποία αφού είναι μοναδική, είναι κανονική.

$$n_7 = 1mod(7) \ \ \& \ \ n_7 \mid 5^2 \Leftrightarrow n_7 = 1mod(7) \ \ \& \ \ n_7 = 1 \ \ || \ \ n_7 = 5 \ \ || \ \ n_7 = 25 \Leftrightarrow$$

$$n_7 = 1$$

Άρα υπάρχει μοναδική $Sylow7-$υποομάδα της G, έστω Q, η οποία αφού είναι μοναδική, είναι κανονική. Από θεώρημα $Sylow$, η G γράφεται σαν το ευθύ γινόμενο των $Sylow$ υποομάδων της.
Άρα έχουμε $G = P \times Q = \mathbb{Z}_{5^2} \times \mathbb{Z}_{7^2}$.
Από θεώρημα πεπερασμένων αβελιανών ομάδων έχουμε ως προς ισομορφισμό τις εξής επιλογές:

- $G = \mathbb{Z}_{5^2} \times \mathbb{Z}_{7^2}$
- $G = \mathbb{Z}_{5^2} \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$
- $G = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7 \times Z_7$
- $G = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{7^2}$

(ii) Έστω $H < A_n$ με $[A_n : H] = k$
Αφού το $n \geq 5$, η A_n είναι απλή και επειδή το $k > 1$ αν θεωρήσουμε την $G \rightsquigarrow {}^{G}/_{H}$ έπεται άμεσα ότι

$$A_n \hookrightarrow S_k$$

Άρα,

$$n \leq k$$

■

Θέμα 4

(i) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει απλή ομάδα τάξεως 280.

(ii) Υπάρχουν μη-αβελιανές ομάδες τάξεως $4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντηση σας.

Λύση

(i) Έστω G απλή ομάδα τάξης 280.
$|G| = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$
Έπεται άμεσα ότι $n_7 = 8$ και $n_5 = 56$, άρα έχουμε $8 \cdot (7-1)$ στοιχεία τάξης 7 και $56 \cdot (5-1)$ στοίχεια τάξης 5.

$$280 - 8 \cdot (7-1) - 56 \cdot (5-1) = 8$$

Συνεπώς η G έχει μοναδική $Sylow - 2$ υποομάδα και άρα κανονική , άτοπο!
(Σε ποια σημεία χρησιμοποιήσαμε ότι η G είναι απλή;)

(ii) Η S_3 είναι μη αβελιανή ομάδα με τάξη $2 \cdot 3$.
Η $\mathbb{Z}_{150}$ είναι η κυκλική ομάδα τάξης $2 \cdot 3 \cdot 5^2$.
Η $G = S_3 \times \mathbb{Z}_{150}$ έχει τάξη $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ και είναι μη αβελιανή. (γιατί;)

■

5 Παράρτημα

Πρόσθετη Άσκηση 1: Έστω G απλή ομάδα, υποομάδα της S_n για πεπερασμένο n. Δείξτε ότι:

(1) Δείξτε ότι η G δεν μπορεί να είναι ένα σύνολο από περιττές μεταθέσεις.

(2) Αν η G είναι ένα σύνολο μεταθέσεων που περιέχει τουλάχιστον μία περιττή μετάθεση, τότε $G \cong \mathbb{Z}_2$.

Λύση

(1) Αν η G είναι ένα σύνολο περιττών μεταθέσεων, τότε γινόμενο περιττών μεταθέσεων μας δίνει άρτια μετάθεση (αν m, n περιττοί αριθμοί , τότε το πλήθος των αντιμεταθέσεων του γινομένου θα είναι $m + n =$ άρτιος). Συνεπώς το σύνολο δεν είναι κλειστό ως προς το γινόμενο, συνεπώς δεν είναι υποομάδα της S_n . *Άτοπο*

(2) Παίρνουμε
$$\varphi : S_n \to \mathbb{Z}_2$$
που στέλνει στο 0 τις άρτιες μεταθέσεις και στο 1 τις περιττές.
Αν περιορίσουμε την S_n στην G, τότε έχουμε
$$\varphi|_G : G \to \mathbb{Z}_2$$
η οποία είναι επί. Αφού η G είναι απλή, ο πυρήνας της θα είναι είτε η ταυτοτική, είτε όλη η G.
Όλη η G όμως δεν μπορεί να είναι, γιατί περιέχει τουλάχιστον μία περιττή μετάθεση(αφού υπάρχει $r_G \in G : \varphi(r_G) = 1$). Άρα ο πυρήνας της $\varphi|_G$ θα είναι ο τετριμμένος, συνεπώς από πρώτο θεώρημα ισομορφισμών έχουμε
$$G \Big/ ker(\varphi|_G) \cong \mathbb{Z}_2$$
αφού $\varphi|_G$ επί.

■

Συμπέρασμα: Αν G απλή ομάδα, υποομάδα της S_n για πεπερασμένο n, τότε η G ως υποσύνολο της S_n θα πρέπει να αποτελείται **μόνο** από άρτιες μεταθέσεις, άρα $G \leq A_n$.

Πρόσθετη Άσκηση 2: Γιατί η A_4 δεν μπορεί να έχει άλλες κανονικές υποομάδες;

- Δεν μπορεί να έχει κανονική υποομάδα τάξης 6, γιατί αυτή θα είναι είτε ισόμορφη με την S_3 και αυτή δεν περιέχεται στην A_4 (αφού η S_3 περιέχει και περιττές μεταθέσεις) και επίσης δεν μπορεί να είναι ισόμορφη με την $\mathbb{Z}_6$, γιατί η S_4 δεν περιέχει στοιχείο τάξης 6 (το μέγιστο που περιέχει είναι 4, αφού είναι η S_4).
- Δεν μπορεί να έχει κανονική υποομάδα τάξης 3, γιατί τότε θα έπρεπε να έχει μοναδική $Sylow$ 3-υποομάδα. Έστω G ομάδα με $|G| = 12 = 3 \cdot 4$. Έχουμε ότι
$$n_3 \mid 4 \quad \& \quad n_1 = 1 mod 3 \Leftrightarrow n_3 = 1 \quad || \quad n_3 = 4$$
Αν η G έχει μοναδική $Sylow \ -3$ υποομάδα, τότε θα έχει 2 στοιχεία τάξης 3 και αν δεν έχει μοναδική $Sylow$ 2− υποομάδα τότε θα έχει $3 \cdot 3$ στοιχεία τάξης $2, 2^2$ και συνολικά $11 < |G|$ στοιχεία *Άτοπο*. Αν πάλι έχει μοναδική $Sylow$ 2 υποομάδα τότε η G θα έχει 5 στοιχεία, άτοπο. Άρα G δεν μπορεί να έχει μοναδική $Sylow$ 3− υποομάδα, συνεπώς δεν μπορεί να έχει κανονική υποομάδα τάξης 3. Από την απόδειξη αυτή βέβαια έπεται ότι $n_2 = 1$ και $n_3 = 4$, άρα έχει κανονική υποομάδα τάξης 4 την $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.